

Dans cette séance on va voir

10.12

74

(i) un résultat sur les matrices symétriques ← pour mieux comprendre le thm. spectral

(ii) la décomposition en valeur singulières d'une matrice ▽

Orthogonalité des vecteurs propres associés à valeurs propres distinctes

Corollaire 8 | Soit A une matrice symétrique de taille n .

Si $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, alors $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$.

(Preuve) On suppose que $A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$ et $A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Alors

Lemme 2.1

$$\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (A\bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot (A\bar{v}_2) = \bar{v}_1 \cdot (\lambda_2 \bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0}) \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 \perp \bar{v}_2 \quad \square$$

Chapitre 15 : Décomposition en valeurs singulières (SVD)
(en anglais)

Objectif: é.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\xrightarrow{\text{on veut}}$ $\begin{cases} \bullet U \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \\ \bullet \Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ diagonale et non négative} \\ \bullet V \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \end{cases}$
($\Sigma_{i,j} \geq 0, \forall i,j$)
telles que $A = U \Sigma V^T$ ← décomposition en valeurs singulières (SVD)

typiquement

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \underbrace{\Sigma_{11}}_{\geq 0} & & \\ & \underbrace{\Sigma_{22}}_{\geq 0} & \\ & & \underbrace{0}_{\geq 0} \dots \underbrace{0}_{\geq 0} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \leftarrow \text{pas forcément carrée}$$

On dit que Σ représente des étirements dans certaines directions (ou "stretch")

Par contre U et V^T sont des isométries (car $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ et $\|V^T\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, vu qu'il s'agit de matrices carrées orthogonales).

Théorème 15.5

(Existence de SVD)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Alors, il existe

- (a) $U \in M_m(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $U^T U = I_m$),
- (b) $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonale et non négative (i.e. $\Sigma_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$ et $\Sigma_{ij} \geq 0, \forall ij$),
- (c) $V \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $V^T V = I_n$),

telles que

$$A = U \Sigma V^T$$

cela se ressemble à la diagonalisation orthogonale
 $A = Q D Q^T$

Terminologie

- $U = [\underbrace{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m}_{\substack{\uparrow \quad \uparrow \\ \text{vecteurs singuliers à gauche de } A}}]$
- $\Sigma_{i,i} \leftarrow$ valeurs singulières de A ($1 \leq i \leq \min(n, m)$)
- $V = [\underbrace{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n}_{\substack{\uparrow \quad \uparrow \\ \text{vecteurs singuliers à droite de } A}}]$

[RK] I n'y a pas beaucoup d'unicité dans la SVD [75]

Par exemple



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U' \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V'^T}$$

Les matrices U et V peuvent donc changer !

Ce qui ne change pas est l'ensemble de valeurs singulières.

(on va le voir après)

Comment calculer une SVD ?

① Calcul de la matrice Σ

on écrit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

①① Calculer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$

Fait (Lemme 23) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

On répète chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité algébrique !

(Preuve) $\lambda_i \|\bar{v}_i\|^2 = \lambda_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = (A^T A \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_i = (A \bar{v}_i) \cdot (A \bar{v}_i) = \|A \bar{v}_i\|^2 \geq 0$

par $\bar{v}_i$ vecteur propre de $A^T A$ avec valeur propre $\lambda_i \Rightarrow \lambda_i \geq 0$ □

①② Garder les valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0$ de $A^T A$ et $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$\therefore \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_\ell & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

n colonnes

m lignes

$\ell = \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

$(1 \leq i \leq \ell)$

Exemple 15.9 (début)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On va calculer la matrice Σ de la SVD:

(i) On note que $A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 153 & 96 \\ 96 & 97 \end{pmatrix}$

Alors

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{9}{16} = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda - \frac{9}{4}\right)$$

(ii) On conclut que les valeurs propres de $A^T A$ sont

$$\lambda_1 = \frac{9}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4} > 0 \implies \sigma_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

de (1) (i)

(2) Calcul de la matrice V

On reprend les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ de $A^T A$

On calcule une BON $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$

$$V := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \in M_n(\mathbb{R})$$

[RK] Cette base existe car $A^T A$ est symétrique [76]

Exemple 15.9 (suite)

On va calculer la matrice V :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pour } \lambda_1 = \frac{9}{4} &\leadsto \underline{F}_{\frac{9}{4}} = \text{Ker} \left(A^T A - \frac{9}{4} I_2 \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{153}{100} - \frac{9}{4} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & \frac{97}{100} - \frac{9}{4} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{72}{100} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & -\frac{128}{100} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{32}{25} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{4}{3} x_2 \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pour } \lambda_2 = \frac{1}{4} &\leadsto \underline{F}_{\frac{1}{4}} = \text{Ker} \left(A^T A - \frac{1}{4} I_2 \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{128}{100} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & \frac{72}{100} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{32}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = -\frac{3}{4} x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Alors une BON de vecteurs propres est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow V = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

③ Calcul de la matrice U

Méthode 1

→ Complétion + GS
pour la deuxième partie

③ (i) $\bar{u}_j := \frac{A \bar{v}_j}{\sigma_j}, 1 \leq j \leq l$

③ (ii) Si $l < m$, compléter $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l\} \subseteq \mathbb{R}^m$ en une base $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$ et appliquer GS pour obtenir une BON $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m]$$

Exemple 15.9 (final) $\bar{u}_1 = \frac{A \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_2 = \frac{A \bar{v}_2}{\sigma_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}}_{V^T}$$